



Серия №18. Гамильтонов путь и цикл

12 июля

Определение. Гамильтонов путь – простой путь (без повторений вершин и рёбер), проходящий по всем вершинам. Гамильтонов цикл – простой цикл, проходящий по всем вершинам.

1. Минимальная степень вершины в графе равна $k \geq 2$. Докажите, что в этом графе есть:
 - а) простой путь, содержащий не менее k рёбер;
 - б) простой цикл, содержащий не менее $k + 1$ рёбер.
2. Максимальный простой путь в графе содержит k рёбер. Пусть вершины A и B соединяет один из таких путей. Докажите, что если суммарная степень вершин A и B больше k , то в графе есть простой цикл из $k + 1$ рёбра.
3. **Теорема Оре.** Пусть в графе n вершин.
 - а) Известно, что суммарная степень любых двух несоседних вершин не меньше $n - 1$. Докажите, что в этом графе есть гамильтонов путь.
 - б) Известно, что суммарная степень любых двух несоседних вершин не меньше n . Докажите, что в этом графе есть гамильтонов цикл.
4. **Теорема Дирака.** Пусть в графе n вершин.
 - а) Если минимальная степень вершины в графе не меньше $\frac{n-1}{2}$, то в графе есть гамильтонов путь.
 - б) Если минимальная степень вершины в графе не меньше $\frac{n}{2}$, то в графе есть гамильтонов цикл.
5. а) Пусть в графе n вершин и m рёбер, причем $2m \geq n^2 - 3n + 6$. Докажите, что в этом графе есть гамильтонов цикл.
б) Какое максимальное число рёбер может быть в графе с n вершинами, в котором нет гамильтонова пути?
6. Пусть в графе $2n$ вершин, причем степень первой вершины равна 1, второй – 2, третьей – 3, ..., $(2n - 1)$ -ой – $(2n - 1)$. Сколько в этом графе гамильтоновых путей, начинающихся с первой вершины?
7. Дан двудольный граф, содержащий по n вершин в каждой доле. Степень каждой вершины больше $\frac{n}{2}$. Докажите, что в графе существует гамильтонов цикл.
8. На планете M стран и N городов. Некоторые пары городов соединены двусторонними дорогами. При этом выполняются 5 условий:
 - 1) В каждой стране как минимум 3 города;
 - 2) Если в стране k городов, то каждый город в ней соединён как минимум с $\frac{k}{2}$ другими городами этой страны;
 - 3) Каждый город соединён ровно с одним городом за пределами своей страны;
 - 4) Между любыми двумя странами проходит не больше двух дорог;
 - 5) Если в двух странах в сумме менее $2M$ городов, то они точно соединены дорогой.

Докажите, что есть простой цикл из не менее чем $M + \frac{N}{2}$ городов.